令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜
学部学科等	理学部数学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙に略解を示す。
備　　考	

$\boxed{1}$ (1) $f_2(x) = x + \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 dx = x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left[x^4\right]_0^1 = x + \frac{1}{12} \cdots ①$

$$f_3(x) = x + \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x + \frac{1}{12}\right)dx$$
$$= x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 + \frac{1}{36}$$
$$= x + \frac{7}{36}$$

(2) 条件式

$$f_{n+1}(x) = x + \frac{1}{3}\int_0^1 f_n(x)dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \cdots (A)$$

より，$n \geqq 2$ に対して，$f_n(x)$ は定数項を a_n とする1次式

$$f_n(x) = x + a_n \quad \cdots ②$$

で表される。

条件式 (A) は，

$$x + a_{n+1} = x + \frac{1}{3}\int_0^1 (x + a_n)dx = x + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}a_n$$

すなわち，漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6} \quad (n = 2, 3, \cdots) \cdots ③$$

と同値である。

定数 α を $(a_{n+1} - \alpha) = \frac{1}{3}(a_n - \alpha)$ が成り立つ様に
求めるには，α が1次方程式 $\frac{2}{3}\alpha = \frac{1}{6}$ を満たせば
よいから $\alpha = \frac{1}{4}$ とすればよく，③は

$$a_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{4}\right) \quad (n = 2, 3, \cdots) \cdots ③'$$

と同値である。

③' より，$a_n - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(a_2 - \frac{1}{4}\right) \quad (n = 2, 3, \cdots)$

であり，① より $a_2 = \frac{1}{12}$ であるから

$$a_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots ④$$

④を②に代入して

$$f_n(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

を得る。

2

(1) 試合毎にAチームが勝つ場合をA，Bチームが勝つ場合をBで表すことにすると，$n=6$ のとき5試合目でAチームが優勝するのは，1試合目から順にBABAAとなる場合で，その確率は，

$$p_5 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{72}{3125}$$

6試合目でAチームが優勝するのは，1試合目から順にABABAAとなる場合で，その確率は

$$p_6 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{144}{15625}$$

(2) $2j-1$ 試合目でAチームが優勝するのは，$2j-2$ 試合目と $2j-1$ 試合目でAチームが連勝し，$2j-3$ 試合目までは，奇数試合目はBチーム，偶数試合目はAチームが勝つ場合で

BA ⋯ BABAA

のパターンであり，Bチームが勝つ回数が $j-1$ 回，Aチームが勝つ回数が j 回であるから，

$$p_{2j-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{j}$$

(3) (2)と同様に考えると $2j$ 試合目でAチームが優勝するパターンは，ABAB ⋯ ABAA であり，Bチームは $2j-2$ 試合目までの偶数試合目で勝つので，Bが勝つ回数は $j-1$ 回，Aが勝つ回数は $j+1$ 回。よって

$$p_{2j} = \left(\frac{3}{5}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{j+1}$$

(4)
$$q_{2m} = \sum_{j=2}^{m} p_{2j-1} + \sum_{j=1}^{m} p_{2j}$$

$$= \frac{\frac{12}{125}\left\{1-\left(\frac{6}{25}\right)^{m-1}\right\}}{1-\frac{6}{25}} + \frac{\frac{4}{25}\left\{1-\left(\frac{6}{25}\right)^{m}\right\}}{1-\frac{6}{25}}$$

$$\longrightarrow \frac{12\times 25}{19\times 125} + \frac{4\times 25}{19\times 25} = \frac{32}{95} \quad (m\to\infty).$$

$\boxed{3}$

(1) $P_t(t-1,\ 1-t)$, $Q_t(2t,\ 4t)$, $R_t(t^2+2t-1,\ 5t^2-2t+1)$

(2) R_t の座標は $x=t^2+2t-1=(t+1)^2-2$, $y=5t^2-2t+1$ である。

$x=(t+1)^2-2$ は $0\leqq t\leqq 1$ において t に関して増加で、

$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲を動く。t は x に関して解くことが

出来て $(t+1)^2=x+2\geqq 0$ $(-1\leqq x\leqq 2)$ より $t+1=\sqrt{x+2}$, すなわち

$t=\sqrt{x+2}-1$。これを $y=5t^2-2t+1$ に代入して

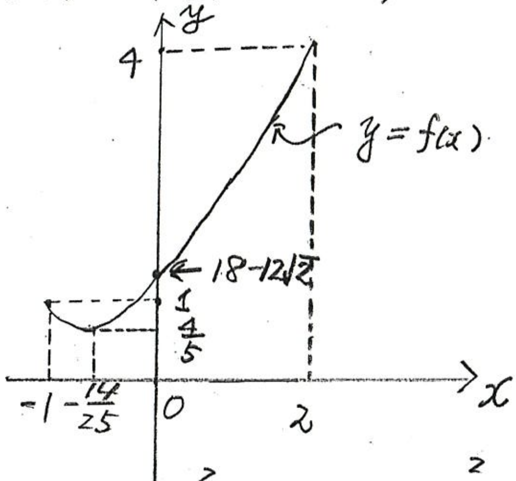
$$y=f(x)=5(x+2)-12\sqrt{x+2}+8$$

を得る。$f'(x)=\dfrac{5\sqrt{x+2}-6}{\sqrt{x+2}}$, $f'(x)=0 \iff \sqrt{x+2}=\dfrac{6}{5}$

$$\iff x=-\frac{14}{25}$$

$x=0 \iff y=18-2\sqrt{2}$。増減表とグラフの概形は

x	-1	$\cdots$	$-\frac{14}{25}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{4}{5}$	↗	4



(3) $V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{2}\{f(x)\}^2dx=25\pi\int_{-1}^{2}(x+2)^2dx+224\pi\int_{-1}^{2}(x+2)dx-120\pi\int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{3}{2}}dx$

$$-192\pi\int_{-1}^{2}(x+2)^{\frac{1}{2}}dx+64\pi\int_{-1}^{2}dx$$

$$=\frac{25}{3}\pi\Big[(x+2)^3\Big]_{-1}^{2}+112\pi\Big[(x+2)^2\Big]_{-1}^{2}-48\pi\Big[(x+2)^{\frac{5}{2}}\Big]_{-1}^{2}$$

$$-128\pi\Big[(x+2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{-1}^{2}+192\pi$$

$$=(525+1680-1488-896+192)\pi$$

$$=13\pi$$