令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	教育学部・経済学部
教科・科目名	数学／ 数学（教育・経済）
	（解答例） 別紙に略解を示す。
備　　考	

教育学部・経済学部

$\boxed{1}$ (1) m,n を自然数とする。

n が奇数のとき, $2m+n$ は 3 以上の奇数, $n+1$ は 2 以上の偶数となる。$132=2^2\times 3\times 11$ より, $(2m+n,n+1)$ の候補は $(3,2^2\times 11),(11,2^2\times 3),(3\times 11,2^2)$ である。

(i) $(2m+n,n+1)=(3,2^2\times 11)$ のとき, $(m,n)=(-20,43)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(ii) $(2m+n,n+1)=(11,2^2\times 3)$ のとき, $(m,n)=(0,11)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(iii) $(2m+n,n+1)=(3\times 11,2^2)$ のとき, $(m,n)=(15,3)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

n が偶数のとき, $2m+n$ は 4 以上の偶数, $n+1$ は 3 以上の奇数となる。$132=2^2\times 3\times 11$ より, $(2m+n,n+1)$ の候補は $(2^2,3\times 11),(2^2\times 3,11),(2^2\times 11,3)$ である。

(i) $(2m+n,n+1)=(2^2,3\times 11)$ のとき, $(m,n)=(-14,32)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(ii) $(2m+n,n+1)=(2^2\times 3,11)$ のとき, $(m,n)=(1,10)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

(iii) $(2m+n,n+1)=(2^2\times 11,3)$ のとき, $(m,n)=(21,2)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

以上より, 求める自然数の組は $(15,3),(1,10),(21,2)$ である。

(2) 不等式

$$\left(\log_2 ab\right)^2-3\log_2 a^2b^2\geqq -5$$

において $x=\log_2 ab$ とおくと,

$$x^2-6x+5\geqq 0$$

を得る。これより, $x\leqq 1$ または $x\geqq 5$ となる。従って, $\log_2 ab\leqq 1$ または $\log_2 ab\geqq 5$ である。これより, $ab\leqq 2$ または $ab\geqq 32$ である。これを満たす (a,b) の組は $(1,1),(1,2),(2,1),(6,6)$ の 4 つである。従って, 求める確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

となり, $\dfrac{1}{9}$ である。

教育学部・経済学部

$\boxed{2}$　(1)　自然数 n に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく。$n = 1$ のとき，

$$S_1 = a_1 = -316$$

となる。$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 + 2n - 321 \end{aligned}$$

である。$n = 1$ のとき，$3n^2 + 2n - 321 = -316$ より，一般項は

$$a_n = 3n^2 + 2n - 321$$

である。

(2)　(1) より，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{6k} &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ 3 \cdot (6k)^2 + 2 \cdot (6k) - 321 \right\} \\ &= 108 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 12 \sum_{k=1}^{10} k - 3210 \end{aligned}$$

である。自然数 n に対して，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

より，

$$\sum_{k=1}^{10} a_{6k} = 39030$$

となる。

教育学部・経済学部

$\boxed{3}$ (1) ℓ の方程式を $y=ax+b$ とする。ここで, a, b は定数であり, $a>0$ である。これが C_1 に接するので, 方程式 $x^2=ax+b$ は重解をもつ。$x^2-ax-b=0$ より,

$$a^2+4b=0$$

である。ℓ が C_2 に接するので, 方程式 $\frac{1}{2}x^2-4x+17=ax+b$ も重解をもつ。
$\frac{1}{2}x^2-(a+4)x+17-b=0$ より,

$$(a+4)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot(17-b)=0$$

である。この 2 つの式より, $a^2+16a-36=0$ となり, $a=2,-18$ を得る。$a>0$ より, $a=2$ となる。このとき, $b=-1$ である。以上より, 求める ℓ の方程式は $y=2x-1$ となる。

(2) C_1 と ℓ との接点の x 座標は $x^2=2x-1$ を解いて, $x=1$ となる。同様に, C_2 と ℓ との接点の x 座標は $\frac{1}{2}x^2-4x+17=2x-1$ を解いて, $x=6$ となる。さらに, C_1 と C_2 との交点の x 座標は $x^2=\frac{1}{2}x^2-4x+17$ を解いて $x=-4\pm5\sqrt{2}$ となる。ここで, $\alpha=-4+5\sqrt{2}$ とおく。$1<\alpha<6$ に注意する。$x>0$ において, C_1, C_2 および ℓ で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$S=\int_1^\alpha\left\{x^2-(2x-1)\right\}dx+\int_\alpha^6\left\{\frac{1}{2}x^2-4x+17-(2x-1)\right\}dx$$

となる。ここで,

$$I=\int_1^\alpha\left\{x^2-(2x-1)\right\}dx,\quad J=\int_\alpha^6\left\{\frac{1}{2}x^2-4x+17-(2x-1)\right\}dx$$

とおく。

$$\begin{aligned}I&=\int_1^\alpha(x^2-2x+1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^\alpha\\&=\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha^2+\alpha-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\alpha-1)^3=\frac{125}{3}(5\sqrt{2}-7)\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}J&=\int_\alpha^6\left(\frac{1}{2}x^2-6x+18\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-3x^2+18x\right]_\alpha^6\\&=36-\frac{1}{6}\alpha^3+3\alpha^2-18\alpha=\frac{1}{6}(6-\alpha)^3=\frac{125}{3}(10-7\sqrt{2})\end{aligned}$$

である。従って,

$$S=I+J=\frac{125}{3}(5\sqrt{2}-7)+\frac{125}{3}(10-7\sqrt{2})=125-\frac{250}{3}\sqrt{2}$$

となる。