令和６年度入試（令和５年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	理学部（理科選択者用）・工学部・都市デザイン学部
教科・科目名	数学
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

【理学部（理科選択者用）・工学部・都市デザイン学部　解答例（略解）】

$\boxed{\mathbf{1}}$　(1) $t>0$ において

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2}(t^2+t)^{-\frac{1}{2}}(2t+1)+\frac{1}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}+\frac{1}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}} \\ &= \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}-\frac{1}{2\sqrt{t^2+t}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2+t}} \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\{F'(t)\}^2=\frac{t}{t+1}$$

である。

(2)(a) 2 次方程式 $s^2-xs+y=0$ が実数解を持つための必要十分条件は判別式が 0 以上であることである。$x=a+b, y=ab$ であるから，判別式は

$$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2 \geqq 0$$

であるので，この 2 次方程式は実数解を持つ。

(b) (a) より

$$y \leqq \frac{x^2}{4}$$

である。一方，$a^2+b^2 \leqq 1$ であり

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2y$$

であるから，$x^2-2y \leqq 1$ すなわち

$$y \geqq \frac{x^2-1}{2}$$

である。また，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ であるから

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

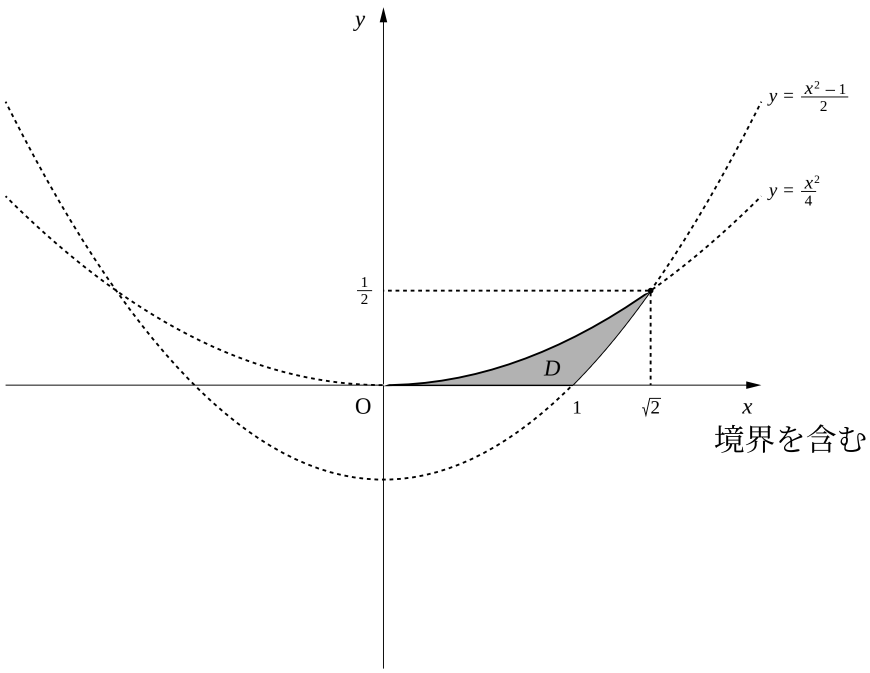
である。以上より x, y は

$$\frac{x^2-1}{2} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

を満たす。逆にこれらを満たす x, y に対して，2 次方程式 $s^2-xs+y=0$ の解 $s=a, b$ は，$x=a+b, y=ab$ かつ $a \geqq 0, b \geqq 0, a^2+b^2 \leqq 1$ を満たす。したがって求める D は，連立不等式

$$\frac{x^2-1}{2} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

の表す領域である。



(c) $\dfrac{1}{16} \leqq t \leqq \dfrac{1}{6}$ とする。$y=t$ と D の共有点 (x, t) は

$$x \geqq 0, \quad \frac{x^2-1}{2} \leqq t \leqq \frac{x^2}{4}$$

を満たす。逆にこれらを満たす x, t に対し，点 (x, t) は $y=t$ と D の共有点である。これを x について整理して

$$2\sqrt{t} \leqq x \leqq \sqrt{2t+1}$$

となるので

$$f(t) = 2\sqrt{t}, \quad g(t) = \sqrt{2t+1}$$

である。したがって

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)} dt = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2t+1}} dt$$

である。$u=2t$ とすると

t	$\frac{1}{16} \to \frac{1}{6}$
u	$\frac{1}{8} \to \frac{1}{3}$

$du = 2dt$ であるから，(1) の関数 $F(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)}dt &= \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \frac{2\sqrt{\dfrac{u}{2}}}{\sqrt{u+1}} \frac{du}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{u}{u+1}}du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} F'(u)du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[F(u)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{F(\frac{1}{3}) - F(\frac{1}{8})\right\}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{3}) &= \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}} + \log\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \log\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{8}) &= \sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{8}} + \log\left(\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}\right) \\
&= \frac{3}{8} + \log\left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \\
&= \frac{3}{8} + \log\frac{2}{\sqrt{8}} \\
&= \frac{3}{8} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)}dt &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(\frac{2}{3} + \log\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{3}{8} + \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7}{24} + \log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{7}{24} + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 数学的帰納法によって示す。
$n=1$ のとき，$a_1=1$ であるから

$$1 \leqq a_1 < 3$$

が成り立つ。
$n=k$ のとき成り立つと仮定する。すなわち

$$1 \leqq a_k < 3$$

であると仮定する。このとき

$$5 = 2\times 1+3 \leqq 2a_k+3 < 2\times 3+3 = 9$$

であるから

$$1 < \sqrt{5} \leqq \sqrt{2a_k+3} < \sqrt{9} = 3$$

となり

$$1 \leqq a_{k+1} < 3$$

が成り立つ。
したがって，すべての自然数 n について $1 \leqq a_n < 3$ が成り立つ。

(2) (1) より $a_n < 3$ だから $3-a_n > 0$，したがって，$b_{n+1} = 3 - a_{n+1} > 0$ である。
また

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3-a_{n+1} \\ &= 3-\sqrt{2a_n+3} \\ &= 3-\sqrt{2(3-b_n)+3} \\ &= \frac{(3-\sqrt{9-2b_n})(3+\sqrt{9-2b_n})}{3+\sqrt{9-2b_n}} \\ &= \frac{9-(9-2b_n)}{3+\sqrt{9-2b_n}} \\ &= \frac{2b_n}{3+\sqrt{9-2b_n}} \end{aligned}$$

となる。ここで，$\sqrt{9-2b_n} > 0$ であるから $3+\sqrt{9-2b_n} > 3$ であり，$b_n > 0$ であるので

$$\frac{2b_n}{3+\sqrt{9-2b_n}} < \frac{2}{3}b_n$$

である。以上より

$$0 < b_{n+1} < \frac{2}{3}b_n$$

である。

(3) (2) より $0 < b_{n+1} < \dfrac{2}{3}b_n$ がすべての自然数 n について成り立つので

$$0 < b_n < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} b_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 2$$

である。$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから

$$0 \leqq \lim_{n\to\infty} b_n \leqq 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=0$$

となり，$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ である。したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(3-b_n)=3-\lim_{n\to\infty} b_n=3$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$　(1) 1 から 10 までの整数について，2 の倍数は，$2, 4, 6, 8, 10$ の 5 個であり，2^2 の倍数は，$4, 8$ の 2 個，2^3 の倍数は，8 のみであり，$2^k (k \geqq 4)$ の倍数はない。よって，10! の素因数 2 の個数は

$$1 \times (5-2) + 2 \times (2-1) + 3 \times 1 = 8$$

である。したがって，求める n の値（$\dfrac{10!}{2^n}$ が整数となる最大の n の値）は 8 である。

(2) 1 から 2024 までの整数について，2^k の倍数の個数を p_k とするとき，2^k の倍数であるが 2^{k+1} の倍数でない整数の個数は $p_k - p_{k+1}$ である。よって，2024! の素因数 2 の個数は，m を $p_{m+1} = 0$ となるような最小の自然数とすると

$$\begin{aligned} &1 \times (p_1 - p_2) + 2 \times (p_2 - p_3) + 3 \times (p_3 - p_4) + \cdots + m \times (p_m - p_{m+1}) \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m \end{aligned}$$

である。p_k は 2024 を 2^k で割ったときの商に等しい。$p_1, p_2, \cdots$ を順に求めると

$$\begin{aligned} p_1 &= 1012 \\ p_2 &= 506 \\ p_3 &= 253 \\ p_4 &= 126 \\ p_5 &= 63 \\ p_6 &= 31 \\ p_7 &= 15 \\ p_8 &= 7 \\ p_9 &= 3 \\ p_{10} &= 1 \\ p_{11} &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって，2024! の素因数 2 の個数は

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{10} = 1012 + 506 + 253 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2017$$

である。よって求める n の値（$\dfrac{2024!}{2^n}$ が整数となる最大の n の値）は 2017 である。

(3) $m = 2024$ とすると $m! = 2024!$ の素因数 2 の個数は (2) より 2017 なので，$\dfrac{2024!}{2^{2024}}$ は整数でない。したがって，条件を満たす m は $m > 2024$ であり，$m!$ の素因数 2 の個数は，2024! の素因数 2 の個数 2017 に加えてあと 7 つは必要である。
そこで，2025 以上の整数について，小さいものから順に $2^k (k = 1, 2, 3, 4)$ の倍数であるか否かを調べると次の表を得る。

m	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
2 の倍数である	×	○	×	○	×	○	×	○
2^2 の倍数である	×	×	×	○	×	×	×	○
2^3 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○
2^4 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○

また，これらの数（2025〜2032）はすべて，$2^k(k \geqq 5)$ の倍数でない。上の表より，2031! は素因数 2 を 2021 個もち，2032! は素因数 2 を 2025 個もつことがわかるので，求める m の値（$\dfrac{m!}{2^{2024}}$ が整数となる最小の m の値）は 2032 である。