（様式）

入試情報の開示

入試の区分	一般選抜　前期日程
入試年度	令和８年度（令和７年度実施）
学部学科等	理学（２科目選択）・工学・都市デザイン学部
教科・科目名	数学
出題意図	高等学校で学ぶ数学についての基礎的な知識や理解度、論理的思考力、応用力を問う。 第1問　微分や級数・極限に関する理解度を確認する。 第2問　三角関数や積分に関する理解度を確認する。 第3問　文字式と場合の数・確率に関する理解度を確認する。
解答又は解答例	（解答例） 別紙のとおり

【理（2科目選択）・工・都市デザイン学部　解答例（略解）】

$\boxed{1}$

（1）$\tan f(x)$ は $y=f(x)$ と $\tan y$ の合成関数なので，その導関数は，$(\tan y)'=\dfrac{1}{\cos^2 y}$ より

$$\begin{aligned}(\tan f(x))' &= \frac{1}{\cos^2 f(x)}f'(x)\\ &= \left(1+\tan^2 f(x)\right)f'(x)\end{aligned}$$

また，$\tan f(x)=x^2+x+1$ を微分すると

$$(\tan f(x))'=(x^2+x+1)'=2x+1$$

であるから

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x+1}{1+\tan^2 f(x)}\\ &= \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1}\end{aligned}$$

（2）$(x^2+x+1)^2+1=0$ は $x=\pm i$ を解にもつので，与式は x^2+1 を因子にもつ。

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)^2+1 &= x^4+2x^3+3x^2+2x+2\\ &= (x^2+1)(x^2+2x+2)\end{aligned}$$

である。
x^2+1 および x^2+2x+2 は係数が整数の範囲では因数分解できない。
したがって

$$(x^2+x+1)^2+1=(x^2+1)(x^2+2x+2)$$

（3）$(\tan f(x))'=2x+1$ だから

$$\begin{aligned}2x+1 &= a\left((x+1)^2+1\right)+b(x^2+1)\\ &= a(x^2+2x+2)+b(x^2+1)\\ &= (a+b)x^2+2ax+2a+b\end{aligned}$$

両辺の x^2 の係数，x の係数，定数項をそれぞれ比べて

$$\begin{cases}a+b=0\\ 2a=2\\ 2a+b=1\end{cases}$$

したがって

$$a=1, b=-1$$

（4）（1）より

$$f'(k)=\frac{2k+1}{(k^2+k+1)^2+1}$$

この分母は（2）より因数分解でき

$$f'(k)=\frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$$

また（3）を用いて分子を書きかえると

$$\begin{aligned}f'(k) &= \frac{((k+1)^2+1)-(k^2+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}\\ &= \frac{g(k+1)-g(k)}{g(k)g(k+1)}\\ &= \frac{1}{g(k)}-\frac{1}{g(k+1)}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}f'(k) &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{g(k)}-\frac{1}{g(k+1)}\right)\\ &= -\frac{1}{g(N+1)}+\frac{1}{g(1)}\\ &= -\frac{1}{(N+1)^2+1}+\frac{1}{2}\\ &\to \frac{1}{2}\qquad (N\to\infty)\end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}f'(k)=\frac{1}{2}$$

$\boxed{2}$

（1）

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^\pi \{f_{n+2}(x) - f_n(x)\}\,dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = \frac{\sin(n+2)x - \sin nx}{\sin x}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(n+2)x &= \sin((n+1)x + x)\\ &= \sin(n+1)x\,\cos x + \cos(n+1)x\,\sin x\\ \sin nx &= \sin((n+1)x - x)\\ &= \sin(n+1)x\,\cos x - \cos(n+1)x\,\sin x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}f_{n+2}(x) - f_n(x) &= \frac{2\cos(n+1)x\,\sin x}{\sin x}\\ &= 2\cos(n+1)x\end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}f_{n+2}(0) - f_n(0) &= (n+2) - n = 2 = 2\cos((n+1)\times 0)\\ f_{n+2}(\pi) - f_n(\pi) &= (-1)^{n+3}(n+2) - (-1)^{n+1}n\\ &= (-1)^{n+1}2 = 2\cos(n+1)\pi\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して

$$f_{n+2}(x) - f_n(x) = 2\cos(n+1)x$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}I_{n+2} - I_n &= \int_0^\pi 2\cos(n+1)x\,dx\\ &= \left[2\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^\pi\\ &= \frac{2}{n+1}(\sin(n+1)\pi - \sin 0) = 0\end{aligned}$$

（2）

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi \left[\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2\right] dx$$

$0 < x < \pi$ のとき

$$\begin{aligned}&\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2\\ &= \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 2(n+1)x) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-\cos(2n+2)x + \cos 2nx}{2\sin^2 x}\end{aligned}$$

加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(2n+2)x &= \cos((2n+1)x + x)\\ &= \cos(2n+1)x\,\cos x - \sin(2n+1)x\,\sin x\\ \cos 2nx &= \cos((2n+1)x - x)\\ &= \cos(2n+1)x\,\cos x + \sin(2n+1)x\,\sin x\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 &= \frac{2\sin(2n+1)x\,\sin x}{2\sin^2 x}\\ &= \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\\ &= f_{2n+1}(x)\end{aligned}$$

また $f_n(x)$ の定義より

$$\begin{aligned}\{f_{n+1}(0)\}^2 - \{f_n(0)\}^2 &= (n+1)^2 - n^2\\ &= 2n+1 = f_{2n+1}(0)\\ \{f_{n+1}(\pi)\}^2 - \{f_n(\pi)\}^2 &= \{(-1)^{n+2}(n+1)\}^2 - \{(-1)^{n+1}n\}^2\\ &= 2n+1\\ &= (-1)^{2n+2}(2n+1) = f_{2n+1}(\pi)\end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して

$$\{f_{n+1}(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 = f_{2n+1}(x)$$

が成り立つ。よって

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^\pi f_{2n+1}(x)\,dx = I_{2n+1}$$

（3）（2）より

$$J_{n+1} - J_n = I_{2n+1}$$

（1）より

$$I_{2n+1} = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi$$

また

$$J_1 = \int_0^\pi dx = \pi$$

よって $\{J_n\}$ は公差 π，初項 π の等差数列なので

$$J_n = J_1 + (n-1)\pi = n\pi$$

3

（1）（a）

$$S=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

（b）

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&\quad=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

より

$$S=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

したがって，次が成り立つ。

$$S\text{が}3\text{の倍数}\iff(x+y+z)^3\text{が}3\text{の倍数}$$

よって

$$(x+y+z)^3\text{が}3\text{の倍数}\iff x+y+z\text{が}3\text{の倍数}$$

が成り立つことを示せばよい。
整数 $x+y+z$ を3で割ったときの商を n，余りを k とすると，k は0，1，2のいずれかであり

$$\begin{aligned}x+y+z&=3n+k\\(x+y+z)^3&=3(9n^3+9n^2k+3nk^2)+k^3\end{aligned}$$

となる。k^3 は0，1，8のいずれかであり，$k^3=1$ または $k^3=8$ ならば $(x+y+z)^3$ は3の倍数でない。
よって，$(x+y+z)^3$ が3の倍数ならば $k^3=0$，すなわち $k=0$ であり，$x+y+z$ は3の倍数である。
逆に，$x+y+z$ が3の倍数ならば，$(x+y+z)^3$ が3の倍数であることは明らか。
以上より，次が成り立つ。

$$\begin{aligned}S\text{が}3\text{の倍数}&\iff(x+y+z)^3\text{が}3\text{の倍数}\\&\iff x+y+z\text{が}3\text{の倍数}\end{aligned}$$

（c）x,y,z のうちの偶数の個数について場合分けする。

[偶数が3つのとき]
x,y,z はすべて偶数なので，$S=x^3+y^3+z^3-3xyz$ も偶数。

[偶数が2つのとき]
x^3,y^3,z^3 のうち偶数は2個，奇数は1個なので $x^3+y^3+z^3$ は奇数。$3xyz$ は偶数なので，$S=x^3+y^3+z^3-3xyz$ は奇数。

[偶数が1つのとき]
x^3,y^3,z^3 のうち偶数は1個，奇数は2個なので $x^3+y^3+z^3$ は偶数。$3xyz$ は偶数なので，$S=x^3+y^3+z^3-3xyz$ も偶数。

[偶数がないとき]
x,y,z はすべて奇数なので，$x^3+y^3+z^3$ も奇数，$3xyz$ も奇数。よって $S=x^3+y^3+z^3-3xyz$ は偶数。

以上の4つの場合ですべてが尽くされ，S が奇数であるのは，偶数が2つのときしかないので

$$S\text{が奇数}\iff x,y,z\text{のうち}2\text{つが偶数，}1\text{つが奇数}$$

（2）（a）
（1）の（a）より

$$\begin{aligned}T&=(p+q+r)(p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp)\\&=(p+q+r)\frac{1}{2}\{(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}T=0&\iff p=q=r\\&\iff (p,q,r)=(1,1,1),(2,2,2),\\&\qquad(3,3,3),(4,4,4),\\&\qquad(5,5,5),(6,6,6)\end{aligned}$$

よって $T=0$ となる場合の数は6通りなので，求める確率は

$$\frac{6}{216}=\frac{1}{36}$$

（b）（1）の（b）と（c）および（2）の（a）より
T が正の数かつ6の倍数

$$\iff\begin{cases}p=q=r\text{でない}\\p+q+r\text{が}3\text{の倍数}\\p,q,r\text{のうち偶数が}2\text{つではない}\end{cases}$$

これらの条件を満たす組 (p,q,r) で $p\leqq q\leqq r$ であるものは

$p+q+r=3$: なし
$p+q+r=6$: $(1,1,4),(1,2,3)$
$p+q+r=9$: $(1,3,5)$
$p+q+r=12$: $(1,5,6),(2,4,6),(2,5,5),(3,3,6),(3,4,5)$
$p+q+r=15$: なし
$p+q+r=18$: なし

p,q,r の並べ替えは，p,q,r のうち等しい組が1組あるときは3通り，すべて相異なるときは6通りであることに注意すると，全部で

$$3\times3+5\times6=39\text{通り}$$

求める確率は

$$\frac{39}{216}=\frac{13}{72}$$